La fonction qui à $t \mapsto tg_n(t)$ est continue sur IR par suite sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_n(t)dt$ existe.

2/ $\star$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt$ $\left(\begin{array}{lll} u'(t)=\cos t & \rightarrowtail & u(t)=\sin t \\ v(t)=t & \rightarrowtail & v'(t)=1 \end{array}\right)$

$= [t\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t.dt = \frac{\pi}{2} - [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$

$\cdot I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_1(t)dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t.dt$ $\left(\begin{array}{lll} u'(t)=\sin t & \rightarrowtail & u(t)=-\cos t \\ v(t)=t^2 & \rightarrowtail & v'(t)=2t \end{array}\right)$

$= [-t^2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)dt = 0 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2.$

3/ $\forall n \in IN^*; I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+3}\sin t.dt$

$\left(\begin{array}{lll} u_1'(t)=\sin t & \rightarrowtail & u_1(t)=-\cos t \\ v_1(t)=t^{n+3} & \rightarrowtail & v_1'(t)=(n+3)t^{n+2} \end{array}\right)$

$= [-t^{n+3}\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2}\cos t.dt$

$\left(\begin{array}{lll} u_2'(t)=\cos t & \rightarrowtail & u_2(t)=\sin t \\ v_2(t)=t^{n+2} & \rightarrowtail & v_2'(t)=(n+2)t^{n+1} \end{array}\right)$

$= (n+3)\left[[t^{n+2}\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1}\sin t.dt \right]$

$= (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)(n+3)I_n$

Signifie que $I_{n+2} + (n+2)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$.

4/ $I_3 = I_{1+2} = (1+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1+2} - (1+2)(1+3)I_1 = \frac{\pi^3}{2} - 12(\pi - 2).$

C-1/a- Soit $x \in IR^*$.

Si $x > 0$ alors $|\int_0^x t.h(t)dt| \overset{th}{\leq} \int_0^x |t.h(t)|dt = \int_0^x t|h(t)|dt.$

Or $\forall t \in [0,x]$ on a $|h(t)| \leq M$ d'ou $\forall t \in [0,x]; t|h(t)| \leq Mt$

Par suite $\int_0^x t|h(t)|dt \leq \int_0^x Mt.dt = M\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = M\frac{x^2}{2}.$

En conclusion $|\int_0^x t.h(t)dt| \leq M\frac{x^2}{2}$ (par transitivité de l'inégalité)

Si $x < 0$ alors $|\int_0^x t.h(t)dt| = |\int_x^0 t.h(t)dt| \overset{th}{\leq} \int_x^0 |t.h(t)|dt =$

Or $\forall t \in [x,0]$ on a $|th(t)| = -t|h(t)| \leq -tM$

$\Rightarrow \int_x^0 |t.h(t)|dt \leq \int_x^0 -tM\,dt = M\left[-\frac{1}{2}t^2\right]_x^0 = M\frac{x^2}{2}.$